

Забележителни константи в математиката с Mathematica

Significant mathematical constants with Mathematica

Степан Терзиян
Stepan Tersian
18.11.2012

1. Лудолфово число (Ludolf number, Arhimedian constant)

π е математическа константа, която представлява отношението между дължината на дадена окръжност и нейния диаметър.

Лудолфово число или

Архимедова константа
Числовата стойност на π ,
закръглена до 100 –
ния знак след десетичната запетая, е

**3, 14159 26535 89793 23846 26433
83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286
20899 86280 34825 34211 70679.**

**π е ирационално число,
т.е. то не може да бъде представено
като отношение на две цели числа;
Йохан Хайнрих Ламберт, 1761.
 π е трансцендентно число,
Фердинанд фон Линдеман, 1882,
т.е. няма полином с рационални
коэффициенти, корен на който е π .**



Universiteit Leiden

**Ludolph van Ceulen,
28 January 1540 – 31 December 1610**

**Лудолф фон Цойлен
е немски математик.**

**Роден е в Германия,
но поради гоненията на
Инквизицията емигрира в Холандия.**

**Работи в Делфт, където
преподава фехтовка и математика.**

**През 1594 отваря школа
по фехтовка в Лайден,
а от 1600 е професор в
Лайденския университет.**

**През 1596 публикува книгата
Van den Circkel "За кръга",
където публикува
стойността на числото пи,
с точност до 20 – тия знак;
по – късно подобрява резултата си,
стигайки до 35 тия
знак. Лудолфовото число
е изписано на надгробната
му плоча в Лайден:**

**3.141592653589793238462643383279:
50288**

Американецът Александър Йе и японецът Шигеру Кондо успяха да уточнят стойността му до 10 трлн. знака след десетичната запетая.

Правилен n – ъгълник с радиус 1 (Regular n – polygon)

Върхове $\left[\left\{ \cos\left[\frac{k 2 \pi}{n}\right], \sin\left[\frac{k 2 \pi}{n}\right] \right\}, \{k, 0, n\} \right]$

Лице / Area $n \sin\left[\frac{\pi}{n}\right]$,

приближение на лицето π на круга с радиус 1.
Изобразяване и премсятане с Mathematica

```
n = 16
```

```
values = Table [ { N [ Cos [  $\frac{k 2 \pi}{n}$  ], 4 ] ,
```

```
  N [ Sin [  $\frac{k 2 \pi}{n}$  ], 4 ] } , { k , 0 , n } ]
```

```
f1 = ListPlot [ values ,  
  PlotStyle → PointSize [ 0.03 ] ,  
  AspectRatio → Automatic ]
```

```
f2 = ListPlot [ values , PlotStyle →  
  PointSize [ 0.02 ] , PlotJoined → True ,  
  AspectRatio → Automatic ]
```

```
Show [ f1 , f2 ]
```

```
{ { 1.000 , 0 } , { 0.9239 , 0.3827 } , { 0.7071 , 0.7071 } , { 0.3827 , 0.9239 } , { 0 , 1.000 } ,  
  { -0.3827 , 0.9239 } , { -0.7071 , 0.7071 } , { -0.9239 , 0.3827 } , { -1.000 , 0 } ,  
  { -0.9239 , -0.3827 } , { -0.7071 , -0.7071 } , { -0.3827 , -0.9239 } , { 0 , -1.000 } ,  
  { 0.3827 , -0.9239 } , { 0.7071 , -0.7071 } , { 0.9239 , -0.3827 } , { 1.000 , 0 } }
```

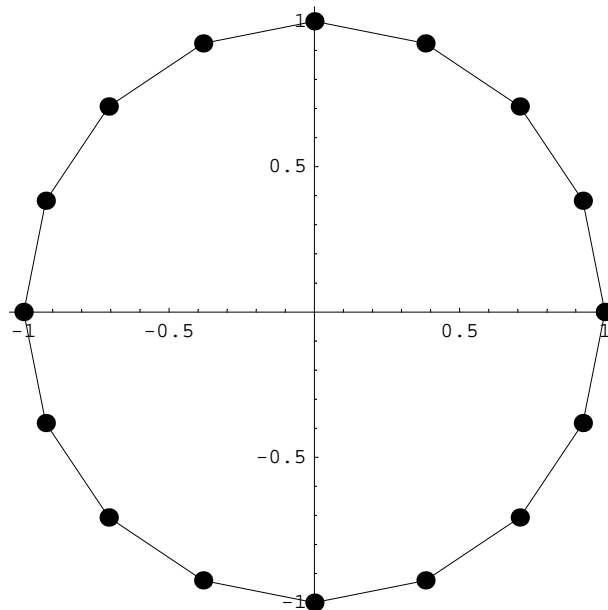
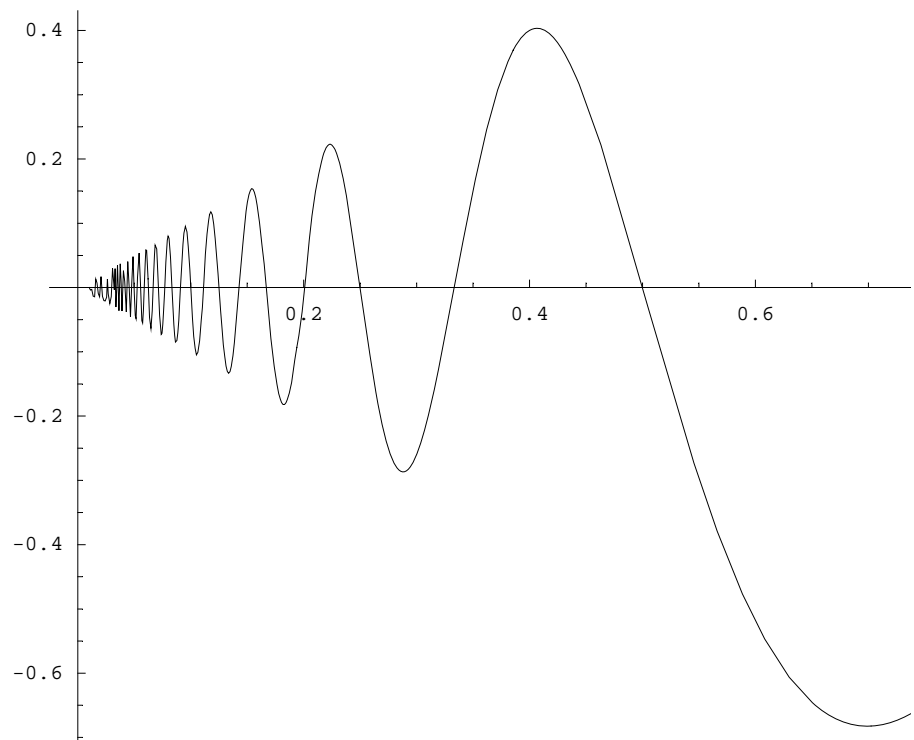


Table [N[n Sin[$\frac{\pi}{n}$], 10], {n, 1, 50}]

```
{0, 2.000000000, 2.598076211, 2.828427125, 2.938926261, 3.000000000,  
3.037186174, 3.061467459, 3.078181290, 3.090169944, 3.099058125,  
3.105828541, 3.111103636, 3.115293075, 3.118675362, 3.121445152,  
3.123741803, 3.125667198, 3.127297215, 3.128689301, 3.129887590,  
3.130926442, 3.131832929, 3.132628613, 3.133330839, 3.133953687,  
3.134508681, 3.135005331, 3.135451534, 3.135853898, 3.136217982, 3.136548491,  
3.136849429, 3.137124222, 3.137375812, 3.137606739, 3.137819206, 3.138015128,  
3.138196180, 3.138363829, 3.138519366, 3.138663931, 3.138798530, 3.138924061,  
3.139041318, 3.139151015, 3.139253786, 3.139350203, 3.139440779, 3.139525976}
```

Plot [x Sin[$\frac{\pi}{x}$], {x, 0.01, 1}]



- Graphics -

$x[1] = 1$

Table[

$$N\left[x[n + 1] = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x[n]^2}}{2}}, 22\right], \{n, 1, 40\}$$

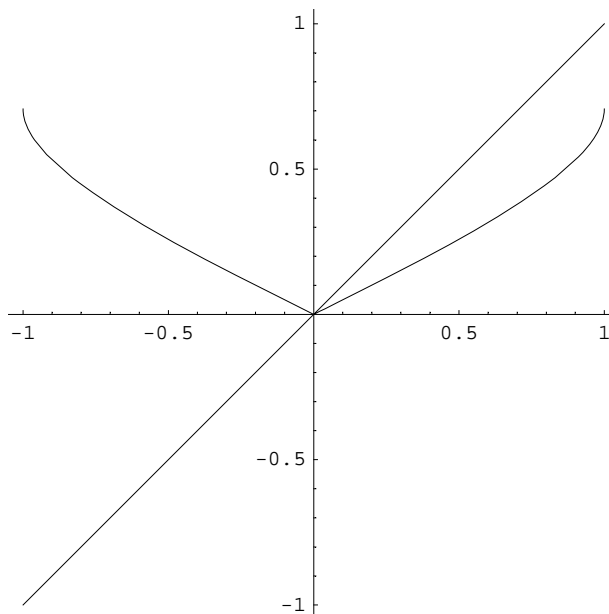
Table[N[2ⁿ x[n], 22], {n, 1, 40}]

```
{0.7071067811865475244008, 0.3826834323650897717285,
0.1950903220161282678483, 0.09801714032956060199420, 0.04906767432741801425495,
0.02454122852291228803173, 0.01227153828571992607941, 0.0061358846491544475359640,
0.003067956762965976270145, 0.001533980186284765612304,
0.0007669903187427045269386, 0.0003834951875713955890725,
0.0001917475973107033074399, 0.00009587379909597734587052,
0.00004793689960306688454900, 0.00002396844980841821872919,
0.00001198422490506970642152, 5.992112452642427842880 × 10-6,
2.996056226334660750455 × 10-6, 1.498028113169011228854 × 10-6,
7.490140565847157211305 × 10-7, 3.745070282923841239032 × 10-7,
1.872535141461953448688 × 10-7, 9.362675707309808279907 × 10-8,
4.681337853654909269512 × 10-8, 2.340668926827455275951 × 10-8,
1.170334463413727718125 × 10-8, 5.851672317068638690810 × 10-9,
2.925836158534319357928 × 10-9, 1.462918079267159680530 × 10-9,
7.314590396335798404604 × 10-10, 3.657295198167899202547 × 10-10,
1.828647599083949601304 × 10-10, 9.143237995419748006558 × 10-11,
4.571618997709874003284 × 10-11, 2.285809498854937001643 × 10-11,
1.142904749427468500821 × 10-11, 5.714523747137342504107 × 10-12,
2.857261873568671252053 × 10-12, 1.428630936784335626027 × 10-12}
```

```
{2.0000000000000000000000, 2.828427124746190097603,
3.061467458920718173828, 3.121445152258052285573,
3.136548490545939263814, 3.140331156954752912317, 3.141277250932772868062,
3.141513801144301076329, 3.141572940367091384136, 3.141587725277159700629,
3.141591421511199973998, 3.141592345570117742340, 3.141592576584872665682,
3.141592634338562989095, 3.141592648776985669485, 3.141592652386591345804,
3.141592653288992765272, 3.141592653514593120163, 3.141592653570993208888,
3.141592653585093231069, 3.141592653588618236614, 3.141592653589499488001,
3.141592653589719800847, 3.141592653589774879059, 3.141592653589788648612,
3.141592653589792091000, 3.141592653589792951597, 3.141592653589793166746,
3.141592653589793220534, 3.141592653589793233980, 3.141592653589793237342,
3.141592653589793238183, 3.141592653589793238393, 3.141592653589793238445,
3.141592653589793238458, 3.141592653589793238462, 3.141592653589793238462,
3.141592653589793238463, 3.141592653589793238463, 3.141592653589793238463}
```

**π с точност до 21 –
тия знак : 3.141592653589793238463**

```
Plot [ {x,  $\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2}}$  },
{x, -1, 1}, AspectRatio  $\rightarrow$  Automatic]
```



2. Квадратен корен от

a. Пресмятане на $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$a > 0, x[1] = 1,$

$$x[n + 1] = \frac{1}{2} \left(x[n] + \frac{a}{x[n]} \right)$$

$x[n]$ е ограничена отдолу редица $x[n] \geq a,$

$x[n] \geq$

$x[n + 1]$. Тогава редицата $(x[n])$ има граница L и

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L} \right) \Rightarrow L = \sqrt{a}$$

a = 2

x[1] = 1

Table[

N[x[n + 1] = $\frac{1}{2} \left(x[n] + \frac{a}{x[n]} \right), 10], \{n, 1, 20\}$

{1.500000000, 1.416666667, 1.414215686, 1.414213562, 1.414213562,
1.414213562, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562,
1.414213562, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562,
1.414213562, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562}

$$a = 5$$

$$x[1] = 1$$

Table[

$$N\left[x[n + 1] = \frac{1}{2} \left(x[n] + \frac{a}{x[n]} \right), 10\right], \{n, 1, 10\}$$

{3.000000000, 2.333333333, 2.238095238, 2.236068896, 2.236067977,
2.236067977, 2.236067977, 2.236067977, 2.236067977, 2.236067977}

**Правилен
петоъгълник / Regular
pentagon
a – страна / side,
D – диагонал / diagonal**

$$D/a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi - \text{златно отношение / golden ratio}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$x[1] = 1, x[n + 1] = 1 + \frac{1}{x[n]}, x[n] \rightarrow \varphi$$

```
x[1] = 1
```

```
Table[N[x[n + 1] = 1 +  $\frac{1}{x[n]}$ , 10], {n, 1, 20}]
```

```
Null
```

```
{2.000000000, 1.500000000, 1.666666667, 1.600000000, 1.625000000,  
1.615384615, 1.619047619, 1.617647059, 1.618181818, 1.617977528,  
1.618055556, 1.618025751, 1.618037135, 1.618032787, 1.618034448,  
1.618033813, 1.618034056, 1.618033963, 1.618033999, 1.618033985}
```

3. Неперово число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Неперово число или Ойлерово число се нарича ирационалното число = 2, 718281828459...

То е основа на естествените логаритми и представлява заедно с пи една от най – важните константи в математиката



**Джон Непер от
Меркистон / (1550 – 4 April 1617)
John Napier of Merchiston
Шотландски математик,
физик, астроном и астролог.
Осми лорд на Меркистон.**

**Scottish landowner known
as a mathematician, physicist,
astronomer and astrologer. He was the
8 th Laird of Merchistoun. Born : 1550.**

$$x[n] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$2 < x[n] < 3$$

$$x[n] < x[n + 1]. \quad \text{Съществува } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \dots$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$\text{Table}\left[\text{N}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, 10\right], \{n, 1, 50\}\right]$$

```
{2.000000000, 2.250000000, 2.370370370, 2.441406250, 2.488320000,
2.521626372, 2.546499697, 2.565784514, 2.581174792, 2.593742460,
2.604199012, 2.613035290, 2.620600888, 2.627151556, 2.632878718,
2.637928497, 2.642414375, 2.646425821, 2.650034327, 2.653297705,
2.656263214, 2.658969859, 2.661450119, 2.663731258, 2.665836331, 2.667784967,
2.669593978, 2.671277853, 2.672849144, 2.674318776, 2.675696306, 2.676990129,
2.678207651, 2.679355428, 2.680439286, 2.681464420, 2.682435477, 2.683356626,
2.684231618, 2.685063838, 2.685856348, 2.686611922, 2.687333085, 2.688022135,
2.688681171, 2.689312111, 2.689916715, 2.690496599, 2.691053247, 2.691588029}
```

```
Table[N[(1 + 1/2^n)^2^n, 8], {n, 1, 20}]
```

```
{2.2500000, 2.4414063, 2.5657845, 2.6379285, 2.6769901, 2.6973450,  
2.7077390, 2.7129916, 2.7156320, 2.7169557, 2.7176185, 2.7179501, 2.7181159,  
2.7181989, 2.7182404, 2.7182611, 2.7182715, 2.7182766, 2.7182792, 2.7182805}
```

```
Plot[(1 + 1/x)^x, {x, 0.1, 20}]
```

